EJERCITACION

INTERPOLACION Y APROXIMACION

A) INTERPOLACION:

Ejercicio n° 1:

a) Dada la siguiente tabla, halle el valor de y para los valores de x=3 y x=7 aplicando la fórmula de Lagrange:

i	0	1	2
x_i	1	2	4
y_i	1	8	64

b) Suponiendo que la función original fuese $y = x^3$, halle el error relativo de cada estimación.

Ejercicio n° 2:

Halle el polinomio interpolante de la función dada por la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
y_i	-18	-2	6	10

Ejercicio n° 3:

Sean los siguientes puntos: (0,0) , (1/6 , 1/2) y (1/2 , 1)

a) Verifique que dichos puntos pertenecen a la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$
b) Halle el polinomio interpolante de Lagrange.
c) Calcule $\text{sen}(\pi/3)$ mediante el polinomio hallado en b)
d) Estime el error que se comete en c).

Ejercicio n° 4:

Sean $\alpha , \beta , \gamma , \delta \in \mathbb{R}$. ¿Qué relación debe cumplirse entre α , β , γ y δ para que exista un polinomio real p(x) de grado no mayor a 2 tal que $p(-1)= \alpha$, $p(1)= \beta$, $p(3)= \gamma$ y $p(0)= \delta$?

Ejercicio n° 5:

Dada la siguiente tabla:

Log 1 = 0.000 Log 2 = 0.301 Log 3 = 0.477 Log 4 = 0.602 Log 5 = 0.699

a) Construya la tabla de diferencias finitas.
b) Calcule Log 1.7 utilizando un polinomio interpolante con la fórmula de Newton.
Justifique porqué elige el progresivo o el regresivo.

☑ Ejercicio n° 6:

Si existe algún polinomio de grado 3 que interpola los siguientes datos, hállelo.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	5	4	3	8	25

☑ Ejercicio n° 7:

En la siguiente tabla se listan los valores de $f(x) = \sqrt{x}$ redondeados hasta 5 decimales.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
y_i	1.0000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

a) Calcule las diferencias hasta orden sexto.
b) Interpole las raíces de 1.01 y 1.28 usando las fórmulas de Newton.
c) Aplique la fórmula de Lagrange para obtener la raíz cuadrada de 1.12
d) Teniendo en cuenta que $\sqrt{x} = 1.05$, utilice los datos de la tabla para encontrar x.
e) Interpolar el valor $\sqrt{1.32}$.

☑ Ejercicio n° 8:

Calcule mediante la fórmula de Newton-Gregory regresiva el polinomio interpolante que pase por los puntos (-1,1), (0,1), (1,1) y (2,-5). Interpole en x=1.5 y x=2.5

☑ Ejercicio n° 9:

Aplique la fórmula de Lagrange para hallar una aproximación de y(1.5) empleando algunos valores de la tabla:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
y_i	0.2420	0.1942	0.1497	0.1109	0.0790	0.0540

Compare con el resultado correcto que es 0.1295

☑ Ejercicio n° 10:

Dada la siguiente función tabulada, halle el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos:

x	1	3	5	6	8
y	1.2	2.4	10	19.2	54.4

Ejercicio n° 11:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	1	3	4	5	7
$f(x_i)$	1	3	13	37	151

a) Halle el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos

b) Con el polinomio hallado, calcule f(6) y responda: ¿De qué grado es el polinomio de menor grado que pasa por todos los puntos de la tabla y además por el punto (6; 80)?

Ejercicio n° 12:

Halle k $\in$ |R para que exista un polinomio de grado 2 que pase por todos los puntos de la siguiente tabla, y halle dicho polinomio en forma normalizada:

x_i	-1	0	2	3	5
$f(x_i)$	10	3	1	k	28

Ejercicio n° 13:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	0	1	4	5	7	8
$f(x_i)$	4	3	0	k	123	220

a) Halle, si es posible, el valor de k $\in$ R tal que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 3.

b) Con el valor de k hallado en a), indique cuántos polinomios de grado 4 pasan por los puntos dados, y cuántos de grado 10 pasan por ellos. Justifique.

Ejercicio n° 14:

Indique si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas justificando:

a) El polinomio de menor grado que pasa por los puntos A (1 ; 3.5) , B (1.5 ; 5.75) , C (2 ; 9) , y D (2.5 ; 13.25) es de grado 3.

b) No existe polinomio de grado 4 que pase por los siguientes puntos: (-1 ; 2) , (-0.5 ; 2.3) , (0 ; 3.4) (0.5 ; 4.5) y (1 ; 5)

c) Si se dispone de una tabla con 6 valores x_i y sus imágenes f_i, entonces existe hasta la diferencia finita progresiva de orden 6 de f_0.

d) El polinomio que pasa por los puntos (-1,-1), (0,3) , (1,0) y (2,-7) tiene coeficiente lineal nulo.

e) Dada una tabla de n pares de valores (x_i,y_i), es posible encontrar más de un polinomio de grado n que interpolen todos los datos.

f) Dado un conjunto de n puntos (x_i,y_i) , existe una única función interpolante tal que $f(x_i)=y_i$ $\forall$ i:1...n

g) El polinomio de menor grado que pasa por los puntos (1 ; 3.5), (1.5 ; 5), (2 ; 6.5), (2.5 ; k) no puede ser de grado 2.

☑ Ejercicio n° 15:

¿Qué relación debe haber entre a, b y c para que el polinomio interpolante de los puntos (-1,a), (0,b) , (1,0) y (2,c) tenga coeficiente lineal nulo?

☑ Ejercicio n° 16:

Dado un conjunto de puntos $\{(x_i, y_i)\}$ entonces se verifica que (puede haber más de una correcta)

a) $\nabla y_k = \Delta y_{k-1}$ b) $\nabla y_{k-1} = \Delta y_k$ c) $\nabla^2 y_k = \Delta^2 y_{k-2}$ d) $\Delta^2 y_k = \nabla^2 y_{k-2}$

☑ Ejercicio n° 17:

Indique los valores de a y b tal que el polinomio interpolante de los 5 puntos sea de grado 4, pero que por los 4 primeros puntos pase un polinomio de grado 2.

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	0	7	24	a	b

a = ... (¿Es único? SI □ NO □) b = ... (¿Es único? SI □ NO □)

☑ Ejercicio n° 18:

El polinomio interpolante de menor grado que pasa por (1,5) (2,7) (x,y) es:

a) siempre una parábola de 2do grado
b) siempre una recta
c) siempre una cúbica
d) depende de (x,y)

☑ Ejercicio n° 19:

El polinomio que interpola a los puntos (0; 3), (0.5; 5), (1; 7) y (k ; 5k) es:

a) de grado 3, $\forall$ k $\in$ |R
b) nunca es de grado 3
c) $\exists$ k tal que sea de grado 1
d) $\exists$ k tal que sea de grado 2

☑ Ejercicio n° 20:

Dado el siguiente conjunto de puntos, cuales de las afirmaciones son correctas:

x	1	1.5	2	2.5	3
y	1.3	b	2.2	a	3

a) Existen infinitos valores de a y b tal que el conjunto de puntos pertenezca a un $P_3(x)$
b) Existe un único valor de a y b tal que el conjunto de puntos pertenezca a un $P_3(x)$
c) Existen infinitos valores de a y b tal que el conjunto de puntos pertenezca a un $P_2(x)$
d) Existen un único valor de a y b tal que el conjunto de puntos pertenezca a un $P_2(x)$

Ejercicio n° 21:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x_i)$	20	20	k	15	12	10	10

a) Halle, si es posible, el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos sea de grado 3. Justifique.

b) Para los demás valores de k, ¿de qué grado es el polinomio?

B) MINIMOS CUADRADOS - DISCRETO:

Ejercicio n° 22:

Dados los siguientes datos, halle una aproximación lineal por mínimos cuadrados. Estime el error.

x_i	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	1	6	8	12	18

Ejercicio n° 23:

Ajuste una recta de Mínimos cuadrados a los datos:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	3	5	6	8	9	11
y_i	2	3	4	6	5	8

a) Siendo x la variable independiente

b) Siendo y la variable independiente

Ejercicio n° 24:

Dada la tabla:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	10.0	10.1	10.2	10.3	10.4	10.5
y_i	1	1.20	1.25	1.267	1.268	1.276

a) Halle la recta de ajuste de mínimos cuadrados

b) Idem a) pero con redondeo simétrico y trabajando con 4 dígitos.

c) Compare resultados.

☑ Ejercicio n° 25:

a) Halle una parábola de regresión de Mínimos Cuadrados que ajuste los siguientes datos:

Año	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
Población en EE.UU (en millones)	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1

Sugerencia: conviene localizar el origen en 1900, de modo tal que 1850 es -5, 1860 es -4, etc. para que los cálculos sean más sencillos.

b) Calcule la población estimada para el año 1960.

☑ Ejercicio n° 26:

Encuentre los polinomios de mínimos cuadrados de grados 1, 2 y 3 para los siguientes datos:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
y_i	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	4.422

¿Cuál es la mejor aproximación?

☑ Ejercicio n° 27:

Aproxime los valores de la tabla a una función potencial de la forma $y = a\,x^b$ (trabaje con redondeo simétrico y 3 decimales)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.5	1.7	3.4	5.7	8.4

☑ Ejercicio n° 28:

Aproxime a una curva de tipo exponencial $y = a\,e^{bx}$ los siguientes datos:

x_i	1	2	3	4
y_i	7	11	17	27

☑ Ejercicio n° 29:

Dada la tabla, ajuste por mínimos cuadrados:

x_i	1	2	3	4
y_i	10	5	2	1

a) a una recta.
b) a un modelo exponencial.
c) a la expresión aproximante: $y = a + b\,\dfrac{1}{x}$
d) a una parábola de mínimos cuadrados.
e) ¿Cuál es la expresión que mejor ajusta dichos datos?

☑ Ejercicio n° 30:

Dada la siguiente tabla:

x_i	1	2	2.5	4	6	8	8.5
y_i	0.4	0.7	0.8	1.0	1.2	1.3	1.4

a) Aproxime mediante el modelo $y = \dfrac{ax}{b+x}$ (promedio de crecimiento de saturación).

b) Aproxime mediante el modelo potencial.

c) Aproxime mediante una parábola por el método de mínimos cuadrados.

☑ Ejercicio n° 31:

Dada la siguiente tabla:

x	0,1	0,7	1,2	2,4	2,9	3,5	4,1	4,4	5	5,8	6,2	6,6
y	3,354	3,563	3,862	4,523	4,952	5,433	6,21	6,534	7,567	9,265	10,986	12,851

a) Ajuste los datos a una recta de mínimos cuadrados.

b) Ajuste los datos a una parábola de mínimos cuadrados.

c) Ajuste los datos a una exponencial $y = a\,e^{bx}$ por mínimos cuadrados.

d) Ajuste los datos a una hipérbola $y = a / (b+x)$ por mínimos cuadrados.

e) Indique cuál es la mejor aproximación.

C) MINIMOS CUADRADOS - CONTINUO:

☑ Ejercicio n° 32:

Dadas las siguientes funciones continuas, aproxime por un polinomio de Mínimos cuadrados en los intervalos indicados y grafique. Por lo menos resuelva 4 ítems utilizando los POLINOMIOS DE LEGENDRE:

a) $f(x) = e^x$ en [1,2] por una recta.

b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ definida en [0,1], aproxime por una función lineal.

c) $f(x) = x^4$ en [-0.5,0.5] por una recta y por una parábola.

d) $f(x) = e^x$ en [0,2] por una recta y por una parábola.

e) $f(x) = x^2 e^x$ en [-1;1] por una recta.

f) $f(x) = (2x)^3$ en [0,1] por una recta y por una parábola.

g) $f(x) = x^3 - 3x$ en [0,1] por una recta.

h) $f(x) = e^x$ en [0,1] por una recta y por una parábola.

RESPUESTAS T.P. INTERPOLACION Y APROXIMACION

A) INTERPOLACION:

1) $p(x) = 7x^2 - 14x + 8$ $\quad p(3) = 29$, $er(3) = 7.4\%$ $\quad p(7) = 253$, $er(7) = 26\%$

2) $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

3) $p(x) = -3x^2 + 3.5x$ $\quad p(1/3) = 5/6 = 0.8333333....$ $\quad f(1/3) = 0.8660254$ $\quad e = 0.032692$

4) $8\delta - 3\alpha - 6\beta + \gamma = 0$

5) $p(x) = -0.002125x^4 + 0.03358333...x^3 - 0.210875x^2 + 0.730416666...x - 0.551$

$p(1.7) = 0.228526287497$ $\quad \log(1.7) = 0.230448921378$

6) $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$

7) a) *Tabla de diferencias finitas:*

1,00000						
	0,02470					
1,02470		**-0,00059**				
	0,02411		**0,00005**			
1,04881		-0,00054		**-0,00002**		
	0,02357		0,00003		**0,00003**	
1,07238		-0,00051		0,00001		**-0,00006**
	0,02306		0,00004		-0,00003	
1,09544		-0,00047		-0,00002		
	0,02259		0,00002			
1,11803		-0,00045				
	0,02214					
1,14017						

b) $p(1.01) = 1.00499$ $\quad p(1.28) = 1.13137$

c) $p(1.12) = 1.05830$

d) $x = 1.10121$

e) $p(1.32) = 1.14889$

8) $p(x) = -x^3 + x + 1$ $\quad p(1.5) = -0.875$ $\quad p(2.5) = -12.125$

9) *Empleando sólo dos valores de la tabla:* $p(1.5) = 0.1303$

10) *Calculamos las diferencias divididas:*

1	1,2	0,6	0,8	0,2	0
3	2,4	3,8	1,8	0,2	
5	10	9,2	2,8		
6	19,2	17,6			
8	54,4				

$P(x) = 1.2 + 0.6(x-1) + 0.8(x-1)(x-3) + 0.2(x-1)(x-3)(x-5) = 0.2x^3 - x^2 + 2x$

11) a) La tabla de diferencia finitas es:

1	1				
3	3	1			
4	13	10	3		
5	37	24	7	1	
7	151	57	11	1	0

Por lo tanto el polinomio interpolante es:

$p(x) = 1 + 1\,(x-1) + 3\,(x-1)(x-3) + 1\,(x-1)(x-3)(x-4)$

$p(x) = 1 + x - 1 + 3\,(x^2 - 4x + 3) + x^3 - 4x^2 + 3x - 4x^2 + 16x - 12$

$p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

b) $p(6) = 6^3 - 5 \bullet 6^2 + 8 \bullet 6 - 3 = 81$

Por lo tanto el polinomio de menor grado que pasa por todos los puntos de la tabla y además por el punto (6; 80) es de grado 5, ya que no existe ninguno de grado menor o igual a 4 que pase por todos ellos.

12) a) k=6

		orden 1	orden 2	orden 3
-1	10			
0	3	-7		
2	1	-1	2	
3	k	k-1	k/3	(k-6)/12
5	28	(28-k)/2	(10-k)/2	(30-5k)/30

1 *b)* $p(x) = 10 - 7\,(x+1) + 2\,(x+1)\,x = 10 - 7x - 7 + 2x^2 + 2x = 2x^2 - 5x + 3$

13) a) K=19 b) De grado 4: cero De grado 10: infinitos

14) a) FALSO. El polinomio de menor grado que pasa por los puntos dados es de grado 2, ya que la diferencia finita de orden 3 es nula.

b) FALSO. Sí, existe polinomio de grado 4, ya que la diferencia finita de orden 4 no es nula.

c) FALSO. Si se dispone de una tabla con 6 valores x_i *y sus imágenes* f_i*, entonces existe hasta la diferencia finita progresiva de orden 5 de* f_0.

d) VERDADERO. El polinomio que pasa por los puntos dados es $p(x) = 0.5\,x^3 - 3.5\,x^2 + 3$ *, o sea tiene coeficiente lineal nulo.*

e) VERDADERO. Dada una tabla de n pares de valores (x_i, y_i)*, es posible encontrar más de un polinomio de grado n que interpolen todos los datos.*

f) FALSO. Dado un conjunto de n puntos (x_i, y_i) *, existen infinitas funciones interpolantes.*

g) VERDADERO. Si k = 8, el polinomio de menor grado que pasa por los puntos dados es de grado 1. Pero si k es distinto de 8, el polinomio es de grado 3. Nunca es de grado 2

☑ Ejercicio n° 33:

Analice la validez de las siguientes afirmaciones, justificando:

- Si f es una función continua en [a,b] y $p_n(x)$ es el polinomio de mínimos cuadrados de grado n, siempre es posible hallar un polinomio de grado n+1 que ajuste mejor a f que $p_n(x)$ en [a,b]
- Es posible hallar una función no lineal tal que exista un polinomio de grado 1 que la aproxime mejor que cualquier polinomio de grado 2.

D) COMBINADOS

☑ Ejercicio n° 34:

Explique las diferencias entre aproximar una función por mínimos cuadrados e interpolar la función. Indique en qué casos se requiere cada una de ellas.

☑ Ejercicio n° 35:

Se hicieron 10 mediciones de la altura de un objeto en caída libre en 10 instantes distintos. Para saber la altura en un determinado instante del intervalo, lo más adecuado sería:

a) hallar un polinomio interpolante con los 10 puntos
b) aproximar por una parábola de regresión
c) aproximar por una recta de regresión
d) ninguna de las anteriores

[Recordar: $h = h_0 + v_o\, t + 0.5\, g\, t^2$]

☑ Ejercicio n° 36:

Un químico ha tomado mediciones de Presión y $(\text{volumen})^{-1}$ de un gas a temperatura constante T, y con estos valores desea estimar el número de moles n: (Ley de los gases: $P\,V = n\,R\,T$, con R constante conocida)

presión	28	35	37	40	45	50	56	59	62	68	74	78	82
vol^{-1}	2.1	2.5	2.7	2.8	3	3.6	3.8	4.2	4.4	5	5.3	5.6	5.9

¿Qué es lo más adecuado que puede hacer?

a) Hallar un polinomio interpolante de todos los datos.
b) Tomar 2 datos y hallar una recta interpolante.
c) Ajustar los datos a una Recta de Mínimos Cuadrados.
d) Ajustar los datos a una Parábola de Mínimos Cuadrados.

Ejercicio n° 37:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x_i)$	1,184	1,056	0,973	0,909	0,856	0,812	0,769

a) Indique de qué grado es el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos.

b) Sólo con las $x \in Z$, obtenga una aproximación exponencial $y = k\,e^{-mx}$ por mínimos cuadrados.

c) Sólo con las $x \in Z$, obtenga una aproximación de la forma: $y = \dfrac{a\,x}{b + x}$ por mínimos cuadrados.

d) Indique cuál de las dos aproxima mejor. Justifique.

Ejercicio n° 38:

a) Calcule f(1.2) con algún método de interpolación y usando la **menor** cantidad de puntos.

x	1	1.7	2	3	3.5
y	2.6	3.85	3	3.7	4

b) Siendo $f_1(x) = 0,45x + 2,4189$ y $f_2(x) = 2,74x^{0,30}$ dos funciones de ajuste de los datos anteriores (parte a). ¿Cuál de las dos funciones ajusta mejor a los datos?

Ejercicio n° 39:

Dada la siguiente tabla de datos:

x	1	2	3	4	5
y=f(x)	21	38	62	104	175

a) Indique de qué grados (todos los que haya) es IMPOSIBLE hallar polinomios que interpolen todos los datos dados. Justifique bien detalladamente.

b) Ajuste los datos a la función: $y = a\,e^{bx}$ por mínimos cuadrados y estime el error.

Ejercicio n° 40:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	-3	-1	1	3	5	7	9
$f(x_i)$	39	19	-21	-57	-65	-21	99

a) El polinomio de menor grado que interpola todos los puntos es de grado .... Justifique.

b) Sólo tomando los primeros 5 puntos, obtenga una aproximación lineal por mínimos cuadrados. Grafique.

15) La relación que deben cumplir es: $2a + 3b + c = 0$

16) Las respuestas correctas son la A y la C

a) $\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$ $\quad \Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1}$ son iguales

b) $\nabla y_{k-1} = y_{k-1} - y_{k-2}$ $\quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ son distintas

c) $\nabla^2 y_k = y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}$ $\quad \Delta^2 y_{k-2} = y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}$ son iguales

d) $\Delta^2 y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$ $\quad \nabla^2 y_{k-2} = y_{k-2} - 2y_{k-3} + y_{k-4}$ son distintas

17) $a = 51$ (único) $\quad b \neq 88$ (no es único, hay infinitos)

18) La respuesta correcta es la D.

19) La respuesta correcta es la C. (De hecho, si $k = 3$, el polinomio interpolante es de grado 1)

20) Las respuestas correctas son la A y la D.

21) a) Si $k = 18$, $p(x)$ es de grado 3. $\quad$ b) $\forall\, k \neq 18$, $p(x)$ es de grado 6.

B) MINIMOS CUADRADOS - DISCRETO:

22) $y = 4x - 7$ Error: $\sum d_i^2 = 4$

23) a) $p(x) = 5/7\, x - 1/3$ $\quad$ b) $p(x) = 7/9\, x - 7/9$

24) $p(x) = 0.4574\, x - 3.47847$

25) $p(x) = 0.3974\, x^2 + 13\, x + 76.64$ $\quad$ Para 1960: $p(6) = 168.9464$

26) Grado 1: $p(x) = 3{,}2536x + 0{,}38016$ $\quad$ $\boxed{\text{Grado 2: } p(x) = 6.618\, x^2 - 1.143\, x + 1.235}$?

Grado 3: $p(x) = 41.84\, x^3 - 33.69\, x^2 + 6.267\, x + 0.917$ $\quad$ Error: 0.2989

27) $y = 0.501 \bullet x^{1.752}$

28) $y = 4.46799 \bullet e^{0.4485x}$

29) a) $p(x) = -3\, x + 12$ Error: 4 $\quad$ b) $y = 22.36\, e^{-0.7824\, x}$ Error: 0.1722

c) $p(x) = 11.938 \bullet 1/x - 1.7179$ $\quad$ d) $p(x) = x^2 - 8\, x + 17$ Error: 0

30) $p(x) = 2.045\, x / (4.053 + x)$ $\quad$ Error: $\sum d_i^2 = 0.005$

31) a) Recta: $y = 1{,}30544472\, x + 1{,}9247018$ $\quad$ Error: $\sum d_i^2 = 13{,}872094$

b) Parábola: $y = 0{,}2631757\, x^2 - 0{,}47125227\, x + 3{,}77674697$ $\quad$ Error: $\sum d_i^2 = 1{,}64153286$

c) Exponencial: $y = 2{,}95364919\, e^{0{,}1990715x}$ $\quad$ Error: $\sum d_i^2 = 5{,}44838946$

d) Hipérbola: $y = \dfrac{-29.5298}{x - 8.90967}$ $\quad$ Error: $\sum d_i^2 = 0{,}07530064$

C) MINIMOS CUADRADOS - CONTINUO:

32) a) $p(x) = 4.59473\,x - 2.22133$

b) $p(x) = 0.07379\,x + 0.4866999$

c) recta: $p(x) = 1/80$; parábola: $p(x) = 3/14\,x^2 - 3/560$

d) recta: $p(x) = 3\,x + 0.194528$

e) $p(x) = 2.4515\,x - 0.50749$

f) recta: $p(x) = 7.2\,x - 1.6$; parábola: $p(x) = 12\,x^2 - 4.8\,x + 0.4$

g) $p(x) = -2.1\,x - 0.2$

h) recta: $p(x) = 1.69031\,x - 0.873127$

33) a) FALSO (Si $f(t) = \cos(\pi t)$ en $[-0.5 , 0.5]$ una constante es mejor que una lineal)

b) VERDADERO (Por ejemplo: $f(x) = x^3$ en $[-1,1]$)

D) COMBINADOS:

34) Teórico.

35) La respuesta correcta es la B, ya que en teoría la relación entre las variables es cuadrática.

36) La respuesta correcta es la C, ya que en teoría la relación entre las variables es lineal.

37) a) Es de grado 5 b) $y = 1.3318\, e^{-0.142x}$ Error: $\sum d_i^2 = 0.00208$

c) $y = 0.728\,x / (x - 0.403)$ Error: $\sum d_i^2 = 0.00688$ c) Es mejor la exponencial

38) a) Utilizando solo 2 puntos: $p(x) = 1.7857\,x + 0.81428 \Rightarrow p(1.2) = 2.9571$

b) Aproxima mejor f_2.

39) a) No existen polinomios de grados 0, 1, 2 y 4 que pasen por los puntos dados.

b) $y = 12.8\, e^{0.5247\,x}$ Error: $\sum d_i^2 = 4.8569$

40) a) El polinomio de menor grado es de grado 3.

b) $p(x) = -14.2\,x - 2.8$

Interpolación y Aproximación

A) INTERPOLACIÓN

① a) Dada la sig. tabla, halle el valor de y para los valores de $x=3$ y $x=7$ aplicando la fórmula de Lagrange.

i	0	1	2
x_i	1	2	4
y_i	1	8	64

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{x^2-6x+8}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{x^2-5x+4}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{x^2-3x+2}{6}$$

$$P(x) = \frac{(x^2-6x+8)}{3}\cdot 1 + \frac{(x^2-5x+4)}{-2}\,8 + \frac{(x^2-3x+2)}{6}\,64$$

$$P(x) = x^2\underbrace{\left(\frac{1}{3}-4+\frac{32}{3}\right)}_{7} + x\underbrace{\left(-2+20-32\right)}_{-14} + \underbrace{\left(\frac{8}{3}-16+\frac{64}{3}\right)}_{8}$$

$$\boxed{P(x) = 7x^2-14x+8}$$

$P(1) = 1$, $P(2) = 8$, $P(4) = 64$ ✓

$\boxed{P(3) = 29}$ $\boxed{P(7) = 253}$

b) Suponiendo que la función original fuese $y=x^3$, halle el error relativo de cada estimación.

$F(3) = 27$; $P(3) = 29$ $\rightarrow e_r = \frac{|29-27|}{27} = 0{,}07$ $\rightarrow \boxed{e_r\% = 7\%}$

$F(7) = 343$; $P(7) = 253$ $\rightarrow e_r = \frac{|343-253|}{343} = 0{,}26$ $\rightarrow \boxed{e_r\% = 26\%}$

Sylvina

② Halle el polinomio interpolante de la función dada por la sig tabla:

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
y_i	-18	-2	6	10

$$L_0(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)} = \frac{(x^2-1)(x-2)}{-12} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{-12} = L_0(x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)} = \frac{(x^2-4)(x-1)}{6} = \frac{x^3-x^2-4x+4}{6} = L_1(x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-2)} = \frac{(x^2-4)(x+1)}{-6} = \frac{x^3+x^2-4x-4}{-6} = L_2(x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-1)} = \frac{(x+2)(x^2-1)}{12} = \frac{x^3+2x^2-x-2}{12} = L_3(x)$$

$$P(x) = \left(\frac{x^3}{-12} + \frac{x^2}{6} + \frac{x}{12} - \frac{1}{6}\right)\cdot(-18) + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right)(-2) + \left(\frac{-x^3}{6} - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right)6 + \left(\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{12} - \frac{1}{6}\right)10 =$$

$$= x^3\underbrace{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - 1 + \frac{5}{6}\right)}_{1} + x^2\underbrace{\left(-3 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{5}{3}\right)}_{-2} + x\underbrace{\left(-\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + 4 - \frac{5}{6}\right)}_{3} + \underbrace{\left(3 - \frac{4}{3} + 4 - \frac{5}{3}\right)}_{4}$$

$$\boxed{P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4} \checkmark$$

$P(-2) = -18$ ✓ $P(1) = 6$ ✓
$P(-1) = -2$ ✓ $P(2) = 10$ ✓

---

③ Sean los sig. puntos: $(0,0)$; $(1/6 ; 1/2)$ y $(1/2, 1)$

a) Verifique que dichos puntos pertenecen a la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$

$f(0) = \mathrm{sen}(\pi\, 0) = 0$ ✓ ; $f(1/6) = \mathrm{sen}(\pi/6) = 1/2$ ✓ ; $f(1/2) = \mathrm{sen}(\pi/2) = 1$ ✓

b) Halle el polinomio interpolante de Lagrange

i	0	1	2
x_i	0	1/6	1/2
y_i	0	1/2	1

$$L_0(x) = \frac{(x-1/6)(x-1/2)}{(0-1/6)(0-1/2)} = \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}\right)\cdot 12 = \boxed{12x^2 - 8x + 1 = L_0(x)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1/2)}{(1/6-0)(1/6-1/2)} = \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)\cdot(-18) = \boxed{-18x^2 + 9x = L_1(x)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1/6)}{(1/2-0)(1/2-1/6)} = \left(x^2 - \frac{x}{6}\right)\cdot 6 = \boxed{6x^2 - x = L_2(x)}$$

$$P(x) = (12x^2 - 8x + 1)\cdot 0 + (-18x^2 + 9x)\frac{1}{2} + (6x^2 - x)\cdot 1 = \boxed{-3x^2 + \frac{7}{2}x = P(x)}$$

$P(0) = 0$ ✓
$P(1/6) = 1/2$ ✓
$P(1/2) = 1$ ✓

c) calcule $\mathrm{sen}(\pi/3)$ mediante el polinomio hallado en b)

$\mathrm{sen}(\pi/3) = f(1/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $P(1/3) = \frac{5}{6}$

$e_r = \frac{\left|\sqrt{3}/2 - 5/6\right|}{\sqrt{3}/2} = 0{,}0377 \Rightarrow \boxed{e_{r\%} = 3{,}77\%}$

d) estime el error que se comete en c)

Mat Sup.

Interpolación

(4) Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ¿Qué relación debe cumplirse entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ para que exista un polinomio real $p(x)$ de grado no mayor a 2 tal que $p(-1)=\alpha$, $p(1)=\beta$, $p(3)=\gamma$ y $p(0)=\delta$?

	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	3
$f(x_i)$	α	δ	β	γ

$$L_0 = \frac{x(x-1)(x-3)}{-1(-1-1)(-1-3)} = \frac{x(x^2-4x+3)}{-(-2)(-4)} = \boxed{\frac{x^3-4x^2+3x}{-8} = L_0}$$

$$L_1 = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(0+1)(0-1)(0-3)} = \frac{(x^2-1)(x-3)}{3} = \boxed{\frac{x^3-3x^2-x+3}{3} = L_1}$$

$$L_2 = \frac{(x+1)\,x\,(x-3)}{(1+1)\,1\,(1-3)} = \frac{(x^2+x)(x-3)}{-4} = \boxed{\frac{x^3-2x^2-3x}{-4} = L_2}$$

$$L_3 = \frac{(x+1)\,x\,(x-1)}{(3+1)\,3\,(3-1)} = \frac{(x^2-1)\,x}{24} = \boxed{\frac{x^3-x}{24} = L_3}$$

$$p(x) = \frac{x^3-4x^2+3x}{-8}\cdot\alpha + \frac{x^3-3x^2-x+3}{4}\cdot\delta + \frac{x^3-2x^2-3x}{-4}\cdot\beta + \frac{x^3-x}{24}\cdot\gamma$$

Necesito que el orden de $p(x)$ sea menor o igual que 2 → que NO sea de orden 3 → solo me interesa que el coeficiente de x^3 sea 0

$$x^3\left(\frac{\alpha}{-8}+\frac{\delta}{3}-\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{24}\right) \to \frac{\alpha}{-8}+\frac{\delta}{3}-\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{24}=0 \to \boxed{-3\alpha+8\delta-6\beta+\gamma=0}$$

---

(5) Dada la sig. tabla: $\log(1)=0{,}000$, $\log(2)=0{,}301$, $\log(3)=0{,}477$, $\log(4)=0{,}602$, $\log(5)=0{,}699$

a) Construya la tabla de diferencias finitas.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,000	0,301	0,477	0,602	0,699

los x son equiespaciados, $h=1$ $\quad y_i = f(x_i)$

f_0	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0,301	-0,125	0,074	-0,051
0,301	0,176	-0,051	0,023	
0,477	0,125	-0,028		
0,602	0,097			
0,699				

$a_0 = 0 \quad a_1 = 0{,}301 \quad a_2 = \frac{-0{,}125}{2} = -0{,}0625$

$a_3 = \frac{0{,}074}{3!} = 0{,}012333 \quad a_4 = -\frac{0{,}051}{4!} = -0{,}002125$

$$p(x) = 0{,}301(x-1) - 0{,}0625\overbrace{(x-1)(x-2)}^{x^2-3x+2} + 0{,}0123\overbrace{(x^2-3x+2)(x-3)}^{x^3-6x^2+11x-6} - 0{,}002125\overbrace{(x^3-6x^2+11x-6)(x-4)}^{x^4-10x^3+35x^2-50x+24}$$

$$p(x) = -0{,}002125x^4 + 0{,}03355x^3 - 0{,}210675x^2 + 0{,}73005x - 0{,}5508$$

$P(1)=0 \quad P(2)=0{,}301 \quad P(3)=0{,}477 \quad P(4)=0{,}602 \quad P(5)=0{,}699$

b) Calcule $\log 1{,}7$ utilizando un polinomio interpolante con la fórmula de Newton. Justifique porqué elige el progresivo o el regresivo.

Elijo el progresivo pues 1,7 está más cerca de $x=1$, $\boxed{P(1{,}7) = 0{,}2285}$

Sylvina

⑥ Si existe algún polinomio de grado 3 que interpola los sig. datos, hállelo.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	5	4	3	8	25

$$a_i = \frac{\Delta^i f_0}{i!\,h^i}$$

los valores de x son equiespaciados con $h=1$

f	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	
0					
	5				
5		-6			
	-1		6		
4		0		0	
	-1		6		0
3		6		0	
	5		6		
8		12			
	17				
25					

$\exists$ gr 3

$\boxed{a_0 = 0}$

$\boxed{a_1 = 5}$

$a_2 = \frac{-6}{2} = \boxed{-3 = a_2}$

$a_3 = \frac{6}{6} = \boxed{1 = a_3}$

$$P(x) = 5(x+1) - 3(x+1)x + 1(x+1)x(x-1) =$$
$$= 5(x+1) - 3(x^2+x) + x^3 - x =$$
$$= \boxed{x^3 - 3x^2 + x + 5 = P(x)}$$

$P(-1) = 0$ $\quad P(2) = 3$
$P(0) = 5$ $\quad P(3) = 8$
$P(1) = 4$ $\quad P(4) = 25$

---

⑦ En la sig. tabla se listan los valores de $f(x) = \sqrt{x}$ redondeados hasta 5 decimales

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
$f(x_i)$	1,0000	1,0247	1,04881	1,07238	1,09544	1,11803	1,14017

Los x son equiespaciales. $h = 0{,}05$

a) Calcule las diferencias hasta orden sexto.

f	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
1,0000						
	0,0247					
1,0247		-0,00059				
	0,02411		0,00005			
1,04881		-0,00054		-0,00002		
	0,02357		0,00003		0,00003	
1,07238		-0,00051		0,00001		-0,00006
	0,02306		0,00004		-0,00003	
1,09544		-0,00047		-0,00002		
	0,02259		0,00002			
1,11803		-0,00045				
	0,02214					
1,14017						

Mat. Sup
Interpolación

b) Interpole las raíces de 1,01 y 1,28 usando las fórmulas de Newton

Como 1,01 y 1,28 están cerca del 0 (más que del 6) → Progresivo

$\boxed{a_0 = 1}$ $a_1 = \frac{0,0247}{1!\ 0,05^1} = \boxed{0,494 = a_1}$ $a_2 = \frac{-0,00059}{2!\ 0,05^2} = \boxed{-0,118 = a_2}$

$a_3 = \frac{0,00005}{3!\ 0,05^2} = \boxed{0,06667 = a_3}$ $a_4 = \frac{-0,00002}{4!\ 0,05^4} = \boxed{-0,13333 = a_4}$

$a_5 = \frac{0,00003}{5!\ 0,05^2} = \boxed{0,8 = a_5}$ $a_6 = \frac{-0,00006}{6!\ 0,05^6} = \boxed{-5,33333 = a_6}$

$$p(x) = 1 + 0,494\,(x-1) + 0,118\,\overbrace{(x-1)(x-1,05)}^{x^2-2,05x+1,05} + 0,06667\,\overbrace{(x-1)(x-1,05)}^{x^2-2,05x+1,05}(x-1,1) +$$
$$-0,13333\,\overbrace{(x-1)(x-1,05)}^{x^2-2,05x+1,05}\overbrace{(x-1,1)(x-1,15)}^{x^2-2,25x+1,265} + 0,8\,\overbrace{(x-1)(x-1,05)}^{x^2-2,05x+1,05}\overbrace{(x-1,1)(x-1,15)}^{x^2-2,25+1,265}(x-1,2) +$$
$$-5,33333\,(x-1)(x-1,05)(x-1,1)(x-1,15)(x-1,2)(x-1,25)$$

Con Excel llegué a:

$$\boxed{p(x) = -11,7731 + 64,4389x - 139,1258x^2 + 161,66x^3 - 105,6666x^4 + 36,8x^5 - 5,333x^6}$$ verifiqué con todos los x

$\boxed{p(1,01) = 1,005097}$ $\boxed{p(1,28) = 1,1316898}$

c) Aplique la fórmula de Lagrange para obtener la raíz cuadrada de 1,12

$$L_0 = \frac{(x-1,05)(x-1,10)(x-1,15)(x-1,20)(x-1,25)(x-1,3)}{(1-1,05)(1-1,10)(1-1,15)(1-1,2)(1-1,25)(1-1,3)} = 0,00001125$$

Muuuuu chas cuentas.

$$L_1 = \frac{(x-1)(x-1,10)(x-1,15)(x-1,2)(x-1,25)(x-1,3)}{(x_0-1)(x_0-1,10)(x_0-1,15)(x_0-1,2)(x_0-1,25)(x_0-1,3)}$$ $-0,00000188$

Las hice con Excel

$y_1 = 1,0247$
$$L_2 = \frac{(x-1)(x-1,05)(x-1,15)(x-1,2)(x-1,25)(x-1,3)}{0,00000075}$$
$y_2 = 1,04881$
$$L_3 = \frac{(x-1)(x-1,05)(x-1,1)(x-1,20)(x-1,25)(x-1,3)}{-0,00000056}$$
$y_3 = 1,07238$
$$L_4 = \frac{(x-1)(x-1,05)(x-1,1)(x-1,15)(x-1,25)(x-1,3)}{0,00000075}$$
$y_4 = 1,09544$
$$L_5 = \frac{(x-1)(x-1,05)(x-1,1)(x-1,15)(x-1,2)(x-1,3)}{-0,00000188}$$
$y_5 = 1,11803$
$$L_6 = \frac{(x-1)(x-1,05)(x-1,1)(x-1,15)(x-1,2)(x-1,25)}{0,00001125}$$
$y_6 = 1,14017$

$$p(x) = L_0 \cdot 1 + L_1\,1,0247 + L_2\,1,04881 + L_3 \cdot 1,07238 + L_4\,1,09544 + L_5\,1,11803 + L_6\,1,14017$$

$$p(x) = (x^6 - 7,05x^5 + 20,6875x^4 - 32,3419x^3 + 28,4108x^2 - 13,2965x + 2,59) \cdot \frac{1}{0,00001125} +$$
$$+ (x^6 - 7x^5 + 20,39x^4 - 31,62x^3 + 27,55x^2 - 12,78x + 2,47) \cdot \frac{1,0247}{-0,00000188} +$$

sigue

$+ (x^6 - 6{,}95\,x^5 + 20{,}09\,x^4 - 30{,}93\,x^3 + 26{,}73\,x^2 - 12{,}30\,x + 2{,}35)\ 1{,}04881/0{,}0000075$

$+ (x^6 - 6{,}90\,x^5 + 19{,}80\,x^4 - 30{,}26\,x^3 + 25{,}96\,x^2 - 11{,}86\,x + 2{,}25)\ 1{,}07238/-0{,}00000056$

$+ (x^6 - 6{,}85\,x^5 + 19{,}52\,x^4 - 29{,}61\,x^3 + 25{,}22\,x^2 - 11{,}44\,x + 2{,}16)\ 1{,}09544/0{,}00000075$

$+ (x^6 - 6{,}80\,x^5 + 19{,}24\,x^4 - 28{,}98\,x^3 + 24{,}52\,x^2 - 11{,}05\,x + 2{,}07)\ 1{,}11803/-0{,}000001875$

$+ (x^6 - 6{,}75\,x^5 + 18{,}96\,x^4 - 28{,}38\,x^3 + 23{,}86\,x^2 - 10{,}69\,x + 1{,}99)\ 1{,}14017/0{,}00001125$

$$p(x) = -5{,}3333\,x^6 + 36{,}8\,x^5 - 105{,}6667\,x^4 + 161{,}66\,x^3 - 139{,}1258\,x^2 + 64{,}4389\,x - 11{,}7731$$

$$\boxed{P(1{,}12) = 1{,}0583}$$

d) teniendo en cuenta que $\sqrt{x} = 1{,}05$, utilice los datos de la tabla para encontrar x

?

e) Interpolar el valor de $\sqrt{1{,}32}$

$$\boxed{P(1{,}32) = 1{,}14889}$$

Interpolación

(8) Calcule mediante la fórmula de Newton-Gregory regresiva el polinomio interpolante que pase por los puntos $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,1)$ y $(2,-5)$. Interpole en $x=1,5$ y $x=2,5$

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	1	1	-5

los x son equiespaciados con $h=1$

f

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 0 & & \\ 1 & & 0 & \\ & 0 & & -6 \\ 1 & & -6 & \\ & -6 & & \\ -5 & & & \end{array}$$

$\boxed{a_0=-5}$

$\boxed{a_1=-6}$

$a_2=\dfrac{-6}{2!}=\boxed{-3=a_2}$

$a_3=\dfrac{-6}{3!}=\boxed{-1=a_3}$

$$p(x)=-5-6(x-2)-3(x-2)(x-1)-1(x-2)(x-1)x=$$

$$=-5-6(x-2)-3(x^2-3x+2)-1(x^3-3x^2+2x)$$

$\boxed{p(x)=-x^3+x+1}$ $\rightarrow$ $\boxed{P(-1)=P(0)=P(1)=1,\ p(2)=-5}$

verificación

$\boxed{\begin{array}{l} P(1,5)=-0,875 \\ P(2,5)=-12,12 \end{array}}$

(9) Aplique la fórmula de Lagrange para hallar una aproximación de $y(1,5)$ empleando algunos valores de la tabla

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
y_i	0,2420	0,1942	0,1497	0,1109	0,0790	0,0540

x equiespaciados $h=0,2$

Voy a usar valores de $\boxed{x=\{1,2;\ 1,4;\ 1,6;\ 1,8\}}$

$\frac{971}{5000}$ $L_1=\dfrac{(x-1,4)(x-1,6)(x-1,8)}{(1,2-1,4)(1,2-1,6)(1,2-1,8)}=\dfrac{(x^2-3x+2,24)(x-1,8)}{-6/125}=-\dfrac{125}{6}\left(x^3-\dfrac{24}{5}x^2+\dfrac{191}{25}x+\dfrac{504}{125}\right)$

$\frac{1497}{10000}$ $L_2=\dfrac{(x-1,20)(x-1,6)(x-1,8)}{(1,4-1,20)(1,4-1,6)(1,4-1,8)}=\dfrac{(x^2-3x+2,16)(x-1,6)}{2/125}=\dfrac{125}{2}\left(x^3-\dfrac{23}{5}x^2+\dfrac{174}{25}x-\dfrac{432}{125}\right)$

$\frac{1109}{10000}$ $L_3=\dfrac{(x-1,2)(x-1,4)(x-1,8)}{(1,6-1,2)(1,6-1,4)(1,6-1,8)}=\dfrac{(x^2-3x+2,16)(x-1,4)}{-2/125}=-\dfrac{125}{2}\left(x^3-\dfrac{22}{5}x^2+\dfrac{159}{25}x-\dfrac{378}{125}\right)$

$\frac{79}{1000}$ $L_4=\dfrac{(x-1,2)(x-1,4)(x-1,6)}{(1,8-1,2)(1,8-1,4)(1,8-1,6)}=\dfrac{(x-1,2)(x^2-3x+2,24)}{6/125}=\dfrac{125}{6}\left(x^3-\dfrac{21}{5}x^2+\dfrac{146}{25}x-\dfrac{336}{125}\right)$

$\boxed{p(x)=0,025x^3-0,03375x^2-0,26175x+0,5137}$

$P(1,20)=0,1942$ $P(1,6)=0,1109$

$P(1,40)=0,1497$ $P(1,8)=0,079$

$\boxed{P(1,5)=0,1295}$

Con valores de la tabla: tomo el promedio de y_2 y de $y_3=\boxed{0,1303}$

S4/

(10) Dada la sig. función tabulada, halle el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos:

x	1	3	5	6	8
y	1,2	2,4	10	19,2	54,4

x no está equiespaciada.

x	f	$\nabla^1 f$	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	
1	1,2				
		$\frac{1,20}{2} = 0,6$			
3	2,4		$\frac{3,2}{4} = 0,8$		
		$\frac{7,6}{2} = 3,8$		$\frac{1}{5}$	
5	10		$\frac{5,4}{3} = 1,8$		0
		$\frac{9,2}{1} = 9,2$		$\frac{1}{5}$	
6	19,2		$\frac{8,4}{3} = 2,8$		
		$\frac{35,2}{2} = 17,6$			
8	54,4				

$$P(x) = 1,2 + 0,6(x-1) + 0,8(x-1)(x-3) + 0,2\overbrace{(x-1)(x-3)}^{(x^2-4x+3)}(x-5) =$$

$$= 1,2 + 0,6(x-1) + 0,8(x^2-4x+3) + 0,2(x^3-9x^2+23x-15)$$

$$\boxed{p(x) = 0,2x^3 - x^2 + 2x}$$ ✓

(11) Dada la sig tabla de datos.

x_i	1	3	4	5	7
$f(x_i)$	1	3	13	37	151

a) Halle el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos

x	f	$\nabla^1 f$	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	
1	1				
		$\frac{2}{2} = 1$			
3	3		$\frac{9}{3} = 3$		
		$\frac{10}{1} = 10$		$\frac{4}{4} = 1$	
4	13		$\frac{14}{2} = 7$		0
		$\frac{24}{1} = 24$		$\frac{4}{4} = 1$	
5	37		$\frac{33}{3} = 11$		
		$\frac{114}{2} = 57$			
7	151				

$$p(x) = 1 + (x-1) + 3(x-1)(x-3) + (x-1)(x-3)(x-4) =$$

$$= x + 3(x^2-4x+3) + (x^3-8x^2+19x-12)$$

$$\boxed{p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 3}$$ ✓

b) Con el polinomio hallado calcule f(6) y responda: ¿De qué grado es el polinomio de menor grado que pase por todos los puntos de la tabla y además por el punto (6;80)?

$p(6) = 81 \neq 80$ ∴ $(6;80) \notin p(x)$ ∴ el polinomio interpolante de menor grado, es el completo para 6 datos → grado 5 ✓

Interpolación

(12) Halle $k \in \mathbb{R}$ para que exista un polinomio de grado 2 que pase por todos los puntos de la sig. tabla y halle dicho polinomio en forma normalizada:

x_i	-1	0	2	3	5
$f(x_i)$	10	3	1	k	28

Si ∃, es único → tomo 3 puntos, hallo el polinomio, evalúo en los otros puntos y hallo k.

tomo $x=-1$, $x=2$ y $x=5$ para que sean equiespaciados, $h=3$

x	f	Δf	$\Delta^2 f$
-1	10		
		-9	
2	1		36
		27	
5	28		

$a_0 = 10$

$a_1 = \frac{-9}{3} = -3 = a_1$

$a_2 = \frac{36}{2!\,3^2} = 2 = a_2$

$P(x) = 10 + 3(x+1) + 2\overbrace{(x+1)(x-2)}^{x^2-x-2} =$

$= 10 - 3x - 3 + 2x^2 - 2x - 4$

$\boxed{P(x) = 2x^2 - 5x + 3}$ ✓

$P(-1) = 10$ ✓; $P(0) = 3$ ✓; $P(2) = 1$ ✓; $\boxed{P(3) = 6}$; $P(5) = 28$ ✓ → $\boxed{k = 6}$

(13) Dada la sig. tabla de datos.

x_i	0	1	4	5	7	8
$f(x_i)$	4	3	0	k	123	220

a) Halle, si es posible, el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 3

(si ∃)

Si ∃, el pol. de grado 3 es único → uso 4 puntos y hallo un pol. de orden 3

x	f			
0	4			
		$\frac{-1}{1} = -1$		
1	3		0	
		$\frac{-3}{3} = -1$		$\frac{7}{7} = 1$
4	0		$\frac{42}{6} = 7$	
		$\frac{123}{3} = 41$		
7	123			

$P(x) = 4 - x + 0x(x-1) + 1(x)\overbrace{(x-1)(x-4)}^{x^2-5x+4} =$

$= 4 - x + x^3 - 5x^2 + 4x$

$\boxed{P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4}$

Verifico en los x dados: $P(0) = 4$ ✓ $P(1) = 3$ ✓ $P(4) = 0$ ✓ $\boxed{P(5) = 19}$; $P(7) = 123$ ✓, $P(8) = 220$ ✓

$\boxed{k = 19}$ ✓

b) Con el valor de k hallado en a) indique cuántos polinomios de grado 4 pasan por los puntos dados, cuántos de grado 10. Justifique

- de grado 4 hay 0 pues el polinomio interpolante es único, y se halló uno de grado 3
- de grado 10 hay infinitos: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4 + (x^2(x-1)(x-4)(x-5)(x-7)(x-8))\alpha$ cumple, y ∃ ∞ α que hace que se cumpla el polinom.

(14) Indique si las sig. proposiciones son Verdaderas o Falsas, justificando:

a) El polinomio de menor grado que pasa por los puntos $A=(1;3,5)$, $B=(1,5;5,75)$, $C=(2;9)$ y $D=(2,5;13,25)$ es de grado 3

1	1,5	2	2,5
3,5	5,75	9	13,25

es equiespaciado con $h=0,5$ $\boxed{F}$

$$\begin{array}{ccccccc} 3,5 & & & & & & \\ & 2,25 & & & & & \\ 5,75 & & 1 & & & & \\ & 3,25 & & 0 & & & \\ 9 & & 1 & & & & \\ & 4,25 & & \Delta^3 f & & & \\ 13,25 & & \Delta^2 f & & & & \\ & \Delta^1 f & & & & & \end{array}$$

El polinomio interpolante es de orden 2 pues $\Delta^3 f = 0$

b) No existe polinomio de grado 4 que pase por los sig. puntos: $(-1;2)$, $(-0,5;2,3)$; $(0;3,4)$, $(0.5;4,5)$ y $(1;5)$ $\boxed{F}$

Es equiespaciado:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & & & & & & & & \\ & 0,3 & & & & & & & \\ 2,3 & & 0,8 & & & & & & \\ & 1,1 & & -0,8 & & & & & \\ 3,4 & & 0 & & 0,2 & & & & \\ & 1,1 & & -0,6 & & & & & \\ 4,5 & & -0,6 & & \Delta^4 f & & & & \\ & 0,5 & & \Delta^3 f & & & & & \\ 5 & & \Delta^2 f & & & & & & \\ & \Delta^1 f & & & & & & & \end{array}$$

El polinomio interpolante es de grado 4 pues $\Delta^4 f = 0,2 \neq 0$

c) Si se dispone de una tabla con 6 valores x_i y sus imágenes f_i, entonces existe hasta la diferencia finita progresiva de orden 6 de f_0

$\boxed{F}$ Si la tabla tiene n valores, entonces existe hasta la diferencia finita progresiva de orden $n-1 \rightarrow$ o sea que $\exists$ hasta orden 5

d) El polinomio que pasa por los puntos $(-1;-1)$, $(0;3)$, $(1;0)$ y $(2;-7)$ tiene coeficiente lineal nulo.

equiespaciado $h=1$

-1	0	1	2
-1	3	0	-7

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & & & & & & \\ & 4 & & & & & \\ 3 & & -7 & & & & \\ & -3 & & 3 & & & \\ 0 & & -4 & & & & \\ & -7 & & & & & \\ -7 & & & & & & \end{array}$$

$\rightarrow \boxed{a_0 = -1}$ $\boxed{a_1 = 4}$ $a_2 = \frac{-7}{2} = -3,5$

$a_3 = \frac{3}{6} = \boxed{0,5 = a_3}$

$$P(x) = -1 + 4(x+1) - 3,5(x+1)x + 0,5(x+1)x(x-1) = -1 + 4(x+1) - 3,5(x^2+x) + 0,5(x^3-x)$$

$\boxed{P(x) = 0,5x^3 - 3,5x^2 + 3} \longrightarrow$ coef lineal x es 0 $\boxed{V}$

e) Dada una tabla de n pares de valores $(x_i;y_i)$ es posible encontrar más de un polinomio de grado n que interpolen todos los datos $\boxed{V}$

Con n pares se puede encontrar solo un polinomio interpolante de grado menor que n pero infinitos para grado $\geq n$

f) Dado un conjunto de n puntos (x_i, y_i) existe una única función interpolante tal que $f(x_i) = y_i \quad \forall i = 1 \dots n$ $\boxed{F}$

Dice FUNCIÓN (no polinomio) y existen infinitas (polin. solo 1)

g) El polinomio de menor grado que pasa por los puntos $(1;3,5)$, $(1,5;5)$, $(2;6,5)$; $(2,5;k)$ no puede ser de grado 2

es equiespaciado $\to h = 0,5$

$$\begin{array}{ccc} 3,5 & & \\ & 1,5 & \\ 5 & & 0 \\ & 1,5 & \\ 6,5 & & \\ & \Delta^1 f & \Delta^2 f \end{array}$$

$\exists$ un polinomio de grado 1 que interpole a 3 puntos. (no de grado 2). Según sea el valor de k, puede llegar a ser de orden 1 o 3 $\to \neq 2$

$\boxed{V}$

---

(15) ¿Qué relación debe haber entre a, b y c para que el polinomio interpolante de los puntos $(-1,a)$, $(0,b)$, $(1,0)$ y $(2,c)$ tenga coeficiente lineal nulo?

es equiespaciado. $h = 1$

$$\begin{array}{cccc} a & & & \\ & b-a & & \\ b & & -2b+a & \\ & -b & & c+b+2b-a = -a+3b+c \\ 0 & & c+b & \\ & c & & \\ c & & & \\ f & \Delta^1 f & \Delta^2 f & \Delta^3 f \end{array}$$

$\boxed{a_0 = a}$ $\boxed{a_1 = b-a}$ $\boxed{a_2 = \frac{-2b+a}{2}}$ $\boxed{a_3 = \frac{-a+3b+c}{6}}$

$$p(x) = a + (b-a)(x+1) + \left(\frac{a-2b}{2}\right)(x+1)x + \left(\frac{-a+3b+c}{6}(x^2+x)(x-1)\right)$$

$$p(x) = a + (b-a)(x+1) + \frac{a-2b}{2}(x^2+x) + \left(\frac{-a+3b+c}{6}(x^3-x)\right)$$

Hallo solo el coeficiente lineal: $x\underbrace{\left(b-a+\frac{a-2b}{2} - \frac{-a+3b+c}{6}\right)}_{0}$

$$0 = b-a+\frac{a-2b}{2} - \frac{-a+3b+c}{6} = \frac{\cancel{6b}-6a+3a-\cancel{6b}+a-3b-c}{6} \to -2a-3b-c=0 \equiv \boxed{2a+3b+c=0}$$ ✓

---

(16) Dado un conjunto de puntos $\{(x_i;y_i)\}$ entonces se verifica que: (puede haber más de una correcta)

a) $\nabla y_k = \Delta y_{k-1}$ b) $\nabla y_{k+1} = \Delta y_k$ c) $\nabla^2 y_k = \Delta^2 y_{k-2}$ d) $\Delta^2 y_k = \nabla^2 y_{k-2}$

a) $\left.\begin{cases} \nabla y_k = y_k - y_{k-1} \\ \Delta y_{k-1} = y_{(k-1)+1} - y_{k-1} = y_k - y_{k-1} \end{cases}\right\} =$

b) $\left.\begin{cases} \nabla y_{k-1} = y_{k-1} - y_{(k-1)-1} = y_{k-1} - y_{k-2} \\ \Delta y_k = y_{k+1} - y_k \end{cases}\right\} \neq$

c) $\left.\begin{cases} \nabla^2 y_k = y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2} \\ \Delta^2 y_{k-2} = y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2} \end{cases}\right\} =$

d) $\left.\begin{cases} \Delta^2 y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k \\ \nabla^2 y_{k-2} = y_{k-2} - 2y_{k-3} + y_{k-4} \end{cases}\right\} \neq$

(17) Indique los valores de a y b tal que el polinomio interpolante de los 5 puntos sea de grado 4 pero que por los <u>4 primeros</u> puntos pase un polinomio de grado 2

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	0	7	24	a	b

$a = 51$ (¿es único? Si ☒ No ☐) $b = 80$ (¿es único? Si ☐ No ☒)

Es equiespaciado.

$$\begin{array}{lll} 0 & & \\ & \Delta^1 f: 7 & \\ 7 & & \Delta^2 f: 10 \\ & 17 & \\ 24 & & \end{array}$$

$a_0 = 0$

$a_1 = 7$

$a_2 = \frac{10}{2} = 5$

$p(x) = 7(x-1) + 5\overbrace{(x-1)(x-2)}^{x^2-3x+2} =$

$$\boxed{p(x) = 5x^2 - 8x + 3}$$

$p(1) = 0$, $p(2) = 7$, $p(3) = 24$ ✓

$p(4) = 51$ $p(5) = 88$

Para que por los 4 primeros números tenga un polinomio interpolante de grado 2 $\rightarrow f(4)$ tiene que ser $p(4) = 51 \rightarrow \boxed{a = 51}$

Para que al pasar por los 5 números tenga grado 4 $\rightarrow p(5) \neq 88$ y existen ∞ números posibles (menos el 88)

---

(18) El polinomio interpolante de menor grado que pasa por $(1,5)$, $(2,7)$, (x,y) es:

a) siempre una parábola de 2° grado

b) siempre una recta

~~c) siempre cúbica~~ tiene 3 datos $\rightarrow$ orden máximo $= 2$

d) depende de (x,y)

$(x_0, y_0) = (1,5)$
$(x_1, y_1) = (2,7)$

$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{7-5}{2-1} = 2 \rightarrow y = 2x + b \xrightarrow{\text{en } (1,5)} 5 = 2 \cdot 1 + b$
$\rightarrow b = 3$

$\exists$ una recta que pasa por $(1,5)$ y $(2,7) \rightarrow \boxed{y = 2x + 3}$

Si $(x,y) = (x, 2x+3) \rightarrow$ el polinomio interp. es de grado 1

Si $(x,y) \neq (x, 2x+3) \rightarrow$ " " " " " " 2

$\therefore$ depende de (x,y)

Interpolación

clase (19) El polinomio que interpola a los puntos $(0;3)$; $(0.5;5)$, $(1;7)$ y $(k, 5k)$ es:

a) de grado 3 $\forall k \in \mathbb{R}$

b) nunca es de grado 3

/ c) $\exists k$ tal que sea de grado 1

d) $\exists k$ tal que sea de grado 2

Analizo el polinomio que pasa por los primeros 3 puntos (son equiespaciados) $h = 0,5$

$$\begin{array}{cccc} 3 & & & \\ & \Delta^1 f = 2 & & \\ 5 & & \Delta^2 f = 0 & \\ & 2 & & \\ 7 & & & \end{array}$$

Es de grado 2 pues $\Delta^2 f = 0$

$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = \frac{2}{0,5} = 4 \end{cases}$ $\boxed{p(x) = 3 + 4x}$

Si por 3 puntos el polin. es de grado 1 → por 4 puntos puede ser de grado 1 o de grado 3
∴ $\nexists k$ tal que sea de grado 2

$p(k) = 3 + 4k = 5k \rightarrow 3 = 1k \rightarrow \boxed{k = 3}$ → $\exists$ 1 valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio es de grado 1

Si $k \neq 3$ → el pol. es de grado 3

---

clase (20) Dado el siguiente conjunto de puntos, cuáles de las afirmaciones son correctas:

x	1	1,5	2	2,5	3
y	1,3	b	2,2	a	3

a) Existen ∞ valores de a y b tal que el conj. de puntos pertenezcan a un $P_3(x)$

b) Existe un único valor de a y b tal que " " " " a un $P_3(x)$

c) Existen ∞ valores de a y b tal que " " " " a un $P_2(x)$

d) Existen un único valor de a y b tal que " " " " a un $P_2(x)$

Busco el polinomio interpolante de $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$ → equiespaciados con $h = 1$

$$\begin{array}{cccc} f & \Delta^1 f & \Delta^2 f \\ 1,3 & & \\ & 0,9 & \\ 2,2 & & -0,1 \\ & 0,8 & \\ 3 & & \end{array}$$

grado 2

$a_0 = 1,3$
$a_1 = 0,9$
$a_2 = \frac{-0,1}{2} = -0,05$

$p(x) = 1,3 + 0,9(x-1) - 0,05(x-1)(x-2) =$
$= 1,3 + 0,9(x-1) - 0,05(x^2 - 3x + 2)$

$\boxed{p(x) = -0,05x^2 + 1,05x + 0,3}$

$p(1) = 1,3$ ✓ $p(1,5) = 1,7625$ $p(2) = 2,2$ ✓ $p(2,5) = 2,6125$ $p(3) = 3$ ✓

Si $a = 1,7625$ y $b = 2,6125$ → el pol. interp es de grado 2 → d)

Si agrego $x = 1,5$ con $b \neq 2,6125$ → voy a obtener un pol. de gr. 3 y puedo encontrar un 'a' tal que el grado no cambie.

Por ejemplo tomo $b = 2$.

$$\begin{array}{cccccc}
x & y & \Delta^1 f & & & \\
1 & 1,3 & & & & \\
 & & \frac{0,7}{0,5} = 1,4 & & & \\
1,5 & 2 & & \frac{-1}{1} = -1 & & \\
 & & \frac{0,2}{0,5} = 0,4 & & \frac{1,26667}{2} = 0,63333 & \\
2 & 2,2 & & \frac{0,4}{1,5} = 0,26667 & & \\
 & & \frac{0,8}{1} = 0,8 & & & \\
3 & 3 & & & &
\end{array}$$

$$p(x) = 1,3 + 1,4(x-1) - \overbrace{(x-1)(x-1,5)}^{x^2 - 2,5x + 1,5} + 0,63333\overbrace{(x-1)(x-1,5)(x-2)}^{x^3 - 4,5x^2 + 6,5x - 3}$$

$$\boxed{p(x) = 0,6333x^3 - 3,85x^2 + 8,02x - 3,50}$$

$p(1) = 1,3$ ✓ $p(1,5) = 2,00$ ✓; $p(2) = 2,2$ ✓; $p(2,5) = 2,38$ $p(3) = 3$ ✓

Si tomo $b = 2$ y $a = 2,38 \rightarrow$ pol. interp. grado 3
$b = 2$ y $a \neq 2,38 \rightarrow$ pol. interpol. grado 4

Así como tomé $b=2$ podría haber tomado cualquier otro valor y llegaría a otro polinomio pero con las mismas condic. $\Rightarrow \exists \infty\ a, b / \in P_3(x)$

---

(21) Dada la sig. tabla de datos.

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x_i)$	20	20	k	15	12	10	10

a) Halle, si es posible, el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que el polin. de menor grado que interpole a todos los puntos sea de grado 3. Justifique.

Si $\exists$ un pol. de grado 3, es único $\rightarrow$ tomo 4 puntos y hallo, si $\exists$, un pol. de grado 3 y observo si para el resto de los puntos ese polinomio los interpola.

tomo $x \in \{4, 6, 8, 10\}$ equiesp. $h = 2$

$$\begin{array}{cccc}
15 & & & \\
 & -3 & & \\
12 & & 1 & \\
 & -2 & & 1 \\
10 & & 2 & \\
 & 0 & & \Delta^3 f \\
10 & \Delta^1 f & \Delta^2 f &
\end{array}$$

$a_0 = 15$
$a_1 = \frac{-3}{2}$
$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{8}$
$a_3 = \frac{1}{3! \, 2^3} = \frac{1}{48}$

$$p(x) = 15 - \frac{3}{2}(x-4) + \frac{1}{8}\overbrace{(x-4)(x-6)}^{x^2 - 10x + 24} + \frac{1}{48}\overbrace{(x-4)(x-6)(x-8)}^{x^3 - 18x^2 + 104x - 192}$$

$$\boxed{p(x) = \frac{x^3}{48} - \frac{x^2}{4} - \frac{7}{12}x + 20}$$

$p(-2) = 20$ ✓ $p(0) = 20$ ✓; $p(2) = 18$ $p(4) = 15$ ✓ $p(6) = 12$ ✓ $p(8) = 10$ ✓ $p(10) = 10$ ✓

$\boxed{k = 18}$ ✓ lo cumple

b) Para los demás valores de k ¿de qué grado es el polinomio?

El polinomio de menor grado con $k \neq 18$ es 6 ✓

B) MÍNIMOS CUADRADOS - DISCRETO

(22) Dados los siguientes datos, halle una aproximación lineal por mínimos cuadrados. Estime el error.

x_i	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	1	6	8	12	18

	x	y	x^2	xy	$g(x)$	d^2
	2	1	4	2	1	0
	3	6	9	18	5	1
	4	8	16	32	9	1
	5	12	25	60	13	1
	6	18	36	108	17	1
Σ	20	45	90	220		4

\# 5

$$\begin{array}{cc|c} a_0 & a_1 \swarrow x & \\ \end{array}$$

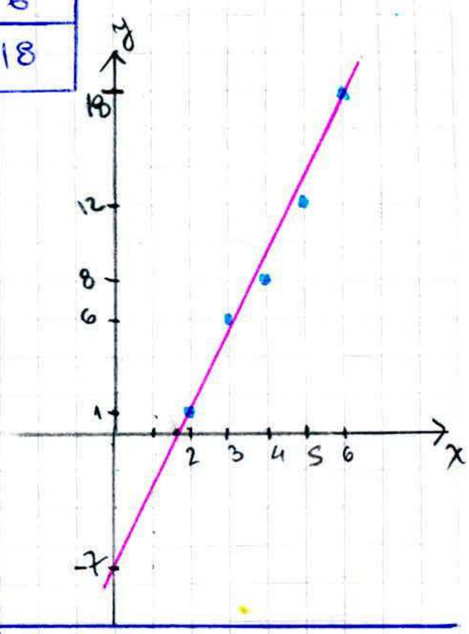
$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 20 & 45 \\ 20 & 90 & 220 \end{array}\right)}$$

$a_0 = -7$

$a_1 = 4$

$$\boxed{y = 4x - 7}$$

$$\boxed{\text{Error} = 4}$$



(23) Ajuste una recta de Mínimos Cuadrados a los datos:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	3	5	6	8	9	11
y_i	2	3	4	6	5	8

a) Siendo x la variable independiente

$$\boxed{y = 0{,}7143x - 0{,}33\overline{3}}$$

error = 1,91

b) Siendo y la variable independiente

$$\boxed{x = 1{,}2857y + 1}$$

$$\equiv \quad x - 1 = 1{,}2857y$$

$$\frac{x-1}{1{,}2857} = y$$

Son equivalentes

$1{,}2857 = \frac{9}{7}$

$$\boxed{\frac{7x}{9} - \frac{7}{9} = y}$$

(24) Dada la tabla:

j	0	1	2	3	4	5
x_j	10	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5
y_j	1	1,2	1,25	1,267	1,268	1,276

a) Halle la recta de ajuste de mínimos cuadrados.

$$\boxed{y = 0{,}45742857\,x - 347847619}$$

b) Idem a) pero con redondeo simétrico y trabajando con 4 dígitos

$$\boxed{y = 0{,}4587\,x - 3{,}4587}$$

c) Compare resultados

más precisión

El error con la recta hallada en a) es 0,02 y con b) es 6,966

---

(25) a) Halle una parábola de regresión de Mínimos cuadrados que ajuste los sig. datos

Año	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
Población	23,2	31,4	39,8	50,2	62,9	76,0	92,0	105,7	122,8	131,7	151,1

(en millones)

Sugerencia: conviene localizar el origen en 1900, de modo tal que 1850 es −5, 1860 es −4, etc. para que los cálculos sean más sencillos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma y_i x_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma y_i x_i^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 110 & 886{,}8 \\ 0 & 110 & 0 & 1429{,}8 \\ 110 & 0 & 1958 & 9209 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{ll} a_0 = 76{,}6438 & \\ a_1 = 12{,}9982 & x \\ a_2 = 0{,}3974 & x^2 \end{array}$$

$$\boxed{y = 0{,}3974\,x^2 + 12{,}9982\,x + 76{,}6438}$$

b) Calcule la población estimada para el año 1960.

$$1960 \rightarrow x = 6 \quad \rightarrow \boxed{y_{(6)} = 168{,}9394}$$

Mínimos cuadrados

(26) Encuentre ~~los~~ polinomios de mínimos cuadrados de grados 1, 2 y 3 para los siguientes datos:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,15	0,31	0,5	0,6	0,75
y_i	1,0	1,004	1,031	1,117	1,223	4,422

¿Cuál es la mejor aproximación? $\sum x_i^6 = 0{,}241158$.

$m = 6$; $\sum x_i = 2{,}31$; $\sum x_i^2 = 1{,}2911$; $\sum x_i^3 = 0{,}796041$, $\sum x_i^4 = 0{,}51824171$

$\sum x_i^5 = 0{,}349254$; $\sum y_i = 9{,}797$; $\sum x_i y_i = 5{,}07901$; $\sum x_i^2 y_i = 3{,}32857$; $\sum x_i^3 y_i = 2{,}3034273$

Recta

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} m & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2{,}31 & 9{,}797 \\ 2{,}31 & 1{,}2911 & 5{,}07901 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} a_0 = 0{,}380167 \\ a_1 = 3{,}25368 \end{array}\right\} \boxed{y = 3{,}25368x + 0{,}380167}$$

Error$_1$ = 5,118517

Parábola

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^2 y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2{,}31 & 1{,}2911 & 9{,}797 \\ 2{,}31 & 1{,}2911 & 0{,}796041 & 5{,}07901 \\ 1{,}2911 & 0{,}796041 & 0{,}5182478 & 3{,}32857 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} a_0 = 1{,}3646 \\ a_1 = -7{,}0177 \\ a_2 = 13{,}802 \end{array}$$

$$\boxed{y = 13{,}802637x^2 - 7{,}017735x + 1{,}364584} \qquad \text{Error}_2 = 1{,}699819$$

$6{,}618x^2 - 1{,}143 + 1{,}235$ ← respuesta guía

Cúbica

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum y_i x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum y_i x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 & \sum y_i x_i^3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2{,}31 & 1{,}2911 & 0{,}796041 & 9{,}797 \\ 2{,}31 & 1{,}2911 & 0{,}796041 & 0{,}5182248 & 5{,}07901 \\ 1{,}2911 & 0{,}796041 & 0{,}5182248 & 0{,}349254 & 3{,}32857 \\ 0{,}796041 & 0{,}5182248 & 0{,}349254 & 0{,}241158 & 2{,}3034273 \end{array}\right)$$

$$\boxed{y = 41{,}8460x^3 - 33{,}6913x^2 + 6{,}2675x + 0{,}9178}$$

Error$_3$ = 0,2989

La mejor aproximación es la cúbica pues es el que tiene menor error

Syl

27) Aproxime los valores de la tabla a una función potencial de la forma: $y = ax^b$ (trabaje con redondeo simétrico y 3 decimales)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,5	1,7	3,4	5,7	8,4

Voy a hacer un cambio de variable

$$y = ax^b \longrightarrow \ln(y) = \ln(ax^b) = \ln(a) + b\ln(x)$$

$$\underbrace{\ln(y)}_{Y} = \ln(a) + b\ln(x)$$

$$Y = C + MX \rightarrow \begin{cases} y = e^Y \\ a = e^C \\ b = M \\ x = e^X \end{cases}$$

x	y	X	Y	X^2	XY
1	0,5	ln(1)	ln(0,5)	0	0
2	1,7	ln(2)	ln(1,7)	0,4805	0,3678
3	3,4	ln(3)	ln(3,4)	1,2069	1,3445
4	5,7	ln(4)	ln(5,7)	1,9218	2,4128
5	8,4	ln(5)	ln(8,4)	2,5903	3,4253
Σ		4,7875	4,9300	6,1995	7,5503

$$\begin{array}{cc} C & M \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & \Sigma X_i & \Sigma Y_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 & \Sigma Y_i X_i \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4,7875 & 4,93 \\ 4,7875 & 6,1995 & 7,5503 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{C = -0,6913 \quad M = 1,7517}$$

$$Y = -0,6913 + 1,7517 \cdot X$$

$$a = e^c = e^{-0,6913} = \boxed{0,501 = a}, \ \boxed{b = M = 1,7517} \rightarrow \boxed{y = 0,501 \cdot x^{1,752}}$$

28) Aproxime a una curva de tipo exponencial $y = a e^{bx}$ los sig. datos:

x_i	1	2	3	4
y_i	7	11	17	27

Voy a hacer un cambio de variable: $y = a e^{bx}$

$$\ln(y) = \ln(a) + bx$$

$$Y = C + MX \rightarrow \begin{array}{l} a = e^C \\ b = M \\ X = x \\ Y = \ln(y) \end{array}$$

x_i	y_i	X	Y (ln(y))	X^2	XY
1	7	1	1,9459	1	1,9459
2	11	2	2,3978	4	4,7956
3	17	3	2,8332	9	8,4996
4	27	4	3,2958	16	13,1832
Σ		10	10,47266	30	28,42469

$$Y = 1,4969 + 0,4485X \rightarrow C = 1,4969 \rightarrow a = e^{1,4969} = \boxed{4,468 = a}$$

$$M = 0,4485 \rightarrow b = 0,4485$$

$$\boxed{y = 4,468\, e^{0,4485x}}$$

(29) Dada la tabla, ajuste por mínimos cuadrados:

x_i	1	2	3	4
y_i	10	5	2	1

a) a una recta

$\boxed{y = 12 - 3x}$ ✓ $\quad$ Error$_a$ = 4

b) a un modelo exponencial

$$\underbrace{y}_{\ln(y)} = a e^{bx} \rightarrow \ln(y) = \ln(a) + \ln e^{(bx)} \rightarrow \ln(y) = \ln(a) + bX$$

x	y	X	Y	X^2	XY	y(x)	d^2
1	10	1	2,3025	1	2,3025	10,225	0,05063
2	5	2	1,6094	4	3,2188	4,6761	0,104911
3	2	3	0,6931	9	2,0793	2,1384	0,0191546
4	1	4	0	16	0	0,9779	0,00049
Σ		10	4,60517	30	7,600903	Σ	0,175186

$$Y = C + MX$$

$$\ln(a) = C \rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = e^C \\ b = M \end{matrix}}$$

$$Y = \underbrace{3,107304}_{C} \underbrace{-0,782405}_{M} X$$

$$M = \boxed{b = -0,782405}$$

$$a = e^C = e^{3,107304} = 22,3607$$

$$\boxed{y = 22,36\, e^{-0,7824x}}$$ ✓

Error$_b$ = 0,175186

c) a la expresión aproximante: $y = a + b\frac{1}{x}$

$$Y = C + MX \rightsquigarrow \begin{cases} a = C \\ b = M \end{cases}$$

x	y	X	Y	X^2	XY	y(x)	d^2
1	10	1	10	1	10	10,22	0,0484
2	5	0,5	5	0,25	1,25	4,2512	0,7488
3	2	0,3333	2	0,1111	0,2222	2,2615	0,06838
4	1	0,25	1	0,0625	1,0625	1,2666	0,07108
Σ		2,0833	18	1,4236	13,41666	Σ	0,93666

$$Y = \underbrace{-1,71795}_{C = a} + \underbrace{11,93846}_{M = b} X$$

Error$_c$ =

$$\rightarrow \boxed{y = -1,71795 + 11,93846 \frac{1}{x}}$$ ✓

d) a una parábola de mínimos cuadrados

$m = 4$; $\sum x_i = 10$; $\sum y_i = 18$; $\sum x_i^2 = 30$; $\sum x_i^3 = 100$; $\sum x_i^4 = 354$

$\sum x_i y_i = 30$; $\sum x_i^2 y_i = 64$

Sig

$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} m & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^2 y_i \end{array}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 30 & 18 \\ 10 & 30 & 100 & 30 \\ 30 & 100 & 354 & 64 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 17 \\ a_1 = -8 \\ a_2 = 1 \end{array}$$

$$\boxed{y = x^2 - 8x + 17} \qquad \text{Error} = 0$$

e) ¿cuál es la expresión que mejor ajusta dichos datos?

La mejor es la parábola ya que el error es cero

---

(30) Dada la siguiente tabla:

x_i	1	2	2,5	4	6	8	8.5
y_i	0.4	0.7	0.8	1.0	1.2	1.3	1.4

a) Aproxime mediante el modelo $y = \frac{ax}{b+x}$ (promedio de crecimiento de saturación)

$$\frac{1}{y} = \frac{b+x}{ax} = \frac{b}{ax} + \frac{x}{ax} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a}\frac{1}{x}$$

$$Y = C + M X$$

$$\begin{cases} Y = \frac{1}{y} \\ C = \frac{1}{a} \rightarrow a = \frac{1}{C} \\ M = \frac{b}{a} \\ X = \frac{1}{x} \end{cases}$$

x	y	X ($1/x$)	Y ($1/y$)	X^2	XY
1	0.4	1	2,5	1	2,5
2	0.7	0,5	1,4285	0,25	0,71425
2,5	0.8	0,4	1,25	0,16	0,5
4	1.0	0,25	1	0,0625	0,25
6	1.2	0,1666	0,8333	0,0277	0,138833
8	1.3	0,125	0,7692	0,0156	0,09615
8,5	1.4	0,1176	0,7142	0,0138	0,08399
Σ		2,5586	8,49523	1,52951	4,2827

$$Y = \underbrace{0,48935}_{C} + \underbrace{1,98146}_{M} X$$

$$a = \frac{1}{C} = \frac{1}{0,48935} \rightarrow \boxed{a = 2,0435}$$

$$M = \frac{b}{a} \rightarrow b = M \cdot a = 1,98146 \times 2,0435$$

$$\boxed{b = 4,04916}$$

$$\boxed{y = \frac{2,0435\,x}{4,04916 + x}}$$

b) Aproxime mediante el modelo potencial

$$y = ae^{bx} \rightarrow \ln(y) = \ln(a) + bx \rightarrow Y = C + MX$$

$$\boxed{\begin{array}{l} M = b \\ a = e^C \end{array}}$$

x	y	X	Y
1	0,4	1	ln(0,4)
2	0,7	2	ln(0,7)
2,5	0,8	2,5	ln(0,8)
4	1,0	4	ln(1)
6	1,2	6	ln(1,2)
8	1,3	8	ln(1,3)
8,5	1,4	8,5	ln(1,4)

$$Y = \underbrace{-0,71496}_{C} + \underbrace{0,130562}_{M=b} X$$

$$C \rightarrow a = 0,4892$$

$$\boxed{y = 0,4892\, e^{0,1306x}}$$

c) Aproxime mediante una parábola por el método de mínimos cuadrados.

$m = 7, \quad \Sigma x_i = 32 \quad \Sigma x_i^2 = 199{,}5 \quad \Sigma x_i^3 = 1430{,}75 \quad \Sigma x_i^4 = 10924{,}125$

$\Sigma y_i = 6{,}8 \quad \Sigma x_i^2 y_i = 251{,}75 \quad \Sigma x_i y_i = 37{,}3$

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^2 y_i \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 32 & 199{,}5 & 6{,}8 \\ 32 & 199{,}5 & 1430{,}75 & 37{,}3 \\ 199{,}5 & 1430{,}75 & 10924{,}125 & 251{,}75 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 0{,}205 \\ a_1 = 0{,}258 \\ a_2 = -0{,}014 \end{array}$$

$$\boxed{y = -0{,}014x^2 + 0{,}258x + 0{,}205}$$

---

31) Dada la sig. tabla:

x	0,1	0,7	1,2	2,4	2,9	3,5	4,1	4,4	5	5,8	6,2	6,6
y	3,354	3,563	3,862	4,523	4,952	5,433	6,21	6,534	7,567	9,265	10,986	12,851

a) Ajuste los datos a una recta de mínimos cuadrados

$$\boxed{y = 1{,}9247 + 1{,}3054x} \checkmark \qquad \text{ERROR}_a = 13{,}8721$$

b) Ajuste los datos a una parábola de mínimos cuadrados

$m = 12; \quad \Sigma x_i = 42{,}9; \quad \Sigma x_i^2 = 205{,}17; \quad \Sigma x_i^3 = 1083{,}201; \quad \Sigma x_i^4 = 6045{,}4245$

$\Sigma y_i = 79{,}10; \quad \Sigma x_i y_i = 350{,}4078; \quad \Sigma x_i^2 y_i = 1855{,}42308$

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma y_i x_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma y_i x_i^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 42{,}9 & 205{,}17 & 79{,}10 \\ 42{,}9 & 205{,}17 & 1083{,}201 & 350{,}4078 \\ 205{,}17 & 1083{,}201 & 6045{,}4245 & 1855{,}42308 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 3{,}7767 \\ a_1 = -0{,}47125 \\ a_2 = 0{,}2632 \end{array}$$

$$\boxed{y = 0{,}263x^2 - 0{,}471x + 3{,}777} \checkmark \qquad \text{ERROR}_b = 1{,}6415$$

c) Ajuste los datos a una exponencial $y = ae^{bx}$ por mínimos cuadrados

$$y = ae^{bx} \rightarrow \underbrace{\ln(y)}_{Y} = \underbrace{\ln(a)}_{C} + \underbrace{bx}_{MX} \qquad b = M \qquad a = e^c$$

$\text{ERROR}_c = 3{,}4484$

$$Y = \underbrace{1{,}08304}_{C} + \underbrace{0{,}19907}_{M}X \rightarrow a = 2{,}9536 \rightarrow \boxed{y = 2{,}9536\, e^{0{,}199x}}$$

d) Ajuste los datos a una hipérbola $y = \frac{a}{b+x}$ por mínimos cuadrados

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{a} + \frac{x}{a} \rightarrow Y = C + MX = \underbrace{0{,}301717}_{M} \underbrace{-0{,}033864}_{\frac{1}{a} \to a = -29{,}5299} X$$

$b = aM$

$E = 0{,}07537$

$$\boxed{y = \frac{-29{,}5299}{x - 8{,}9097}} \checkmark$$

e) Indique cuál es la mejor aproximación

La de menor error es la hipérbola de d)

Sgl

c) MÍNIMOS CUADRADOS – CONTINUO:

(32) Dados las sig. funciones continuas, aproxime por un polinomio de mínimos cuadrados en los intervalos indicados y grafique. Por lo menos resuelva 4 ítems utilizando los Polinomios de LEGENDRE.

a) $f(x) = e^x$ en $[1,2]$ por una recta

$\int_1^2 dx = 1$; $\int_1^2 x\,dx = 1{,}5$; $\int_1^2 x^2 dx = 2{,}3333$; $\int_1^2 e^x dx = 4{,}670774$; $\int_1^2 x e^x dx = 7{,}389056$

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1{,}5 & 4{,}670774 \\ 1{,}5 & 2{,}333 & 7{,}389056 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = -2{,}22136 \\ a_1 = 4{,}594758 \end{array}$$

$$\boxed{y = 4{,}5948x - 2{,}2214}$$ ✓

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ definida en $[0,1]$, aproxime por una función lineal

$\int_0^1 dx = 1$; $\int_0^1 x\,dx = 0{,}5$; $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$; $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = 0{,}523599$; $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = 0{,}267949$

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}523599 \\ 0{,}5 & 0{,}333 & 0{,}267949 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 0{,}4867011 \\ a_1 = 0{,}073795 \end{array} \Bigg\} \boxed{y = 0{,}074x + 0{,}487}$$ ✓

$\pi/6$

c) $f(x) = x^4$ en $(-0{,}5; 0{,}5)$ por una recta y por una parábola.

$\int_{-0,5}^{0,5} dx = 1$; $\int_{-0,5}^{0,5} x\,dx = 0$; $\int_{-0,5}^{0,5} x^2 dx = 0{,}0833$; $\int_{-0,5}^{0,5} x^3 dx = 0 = \int_{-0,5}^{0,5} x^5 dx$; $\int_{-0,5}^{0,5} x^4 dx = 0{,}0125$; $\int_{-0,5}^{0,5} x^6 dx = \frac{1}{448}$

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0{,}0125 \\ 0 & 0{,}0833 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 0{,}0125 \\ a_1 = 0 \end{array} \rightarrow \boxed{y = 0{,}0125}$$ ✓

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/12 & 1/80 \\ 0 & 1/12 & 0 & 0 \\ 1/12 & 0 & 1/80 & 1/448 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} a_0 = -\frac{3}{560} \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{3}{14} \end{array} \Bigg\} \boxed{y = \frac{3}{14}x^2 - \frac{3}{560}}$$ ✓

d) $f(x) = e^x$ en $[0,2]$ por una recta y por una parábola

$\int_0^2 dx = 2$; $\int_0^2 x\,dx = 2$; $\int_0^2 x^2 dx = 8/3$; $\int_0^2 x^3 dx = 4$; $\int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5}$; $\int_0^2 e^x dx = 6{,}3891$; $\int_0^2 x e^x dx = 8{,}38906$

$\int_0^2 x^2 e^x dx = 12{,}77811$

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6{,}3891 \\ 2 & 8/3 & 8{,}38906 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 0{,}19461 \\ a_1 = 2{,}99994 \end{array} \quad \boxed{y = 3x + 0{,}195}$$ ✓

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 8/3 & 6{,}3891 \\ 2 & 8/3 & 4 & 8{,}3891 \\ 8/3 & 4 & 32/5 & 12{,}7781 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 1{,}166925 \\ a_1 = 0{,}082875 \\ a_2 = 1{,}4585625 \end{array} \Bigg\} \quad \boxed{y = 1{,}459x^2 + 0{,}083x + 1{,}167}$$

Aprox. c.m

$\|\varphi_i\| = \frac{2}{2k+1}$

$a_i = \frac{\int f(x)\varphi_i(x)\,dx}{\|\varphi_i\|}$

cont. 32)

e) $f(x) = x^2 e^x$ en $[-1,1]$ por una recta

$\varphi_0(x) = 1 \rightarrow \|\varphi_0\| = 2$

$\varphi_1(x) = x \rightarrow \|\varphi_1\| = 2/3$

$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \rightarrow \|\varphi_2\| = 2/5$

$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 e^x\,dx}{2} = 0{,}4394423$; $a_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x^3 e^x\,dx}{2/3} = 0{,}6743 \rightarrow \boxed{y = 0{,}674x + 0{,}439}$

f) $f(x) = (2x)^3$ en $[0,1]$ por una recta y una parabola

x: 0 — 1 $\quad |x| = 1$
t: −1 — 1 $\quad |t| = 2$
$\frac{2}{1}$ $\quad t = 2x - 1 \rightarrow \boxed{t+1 = 2x}$

$f(x) = (2x)^3$

$f(t) = (t+1)^3$

$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1}(t+1)^3\,dt}{2} = \boxed{2 = a_0}$; $a_1 = \frac{\int_{-1}^{1}(t+1)^3 \cdot t\,dt}{2/3} = \boxed{3{,}6 = a_1}$

$\boxed{\text{Recta}}$: $p_1(t) = 3{,}6t + 2 \rightsquigarrow p_1(x) = 3{,}6(2x-1) + 2 \rightarrow \boxed{p_1(x) = 7{,}2x - 1{,}6}$

$a_2 = \frac{\int_{-1}^{1}(t+1)^3 \frac{1}{2}(3t^2-1)\,dt}{2/5} = \boxed{2 = a_2}$

$p_2(t) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(3t^2-1) + 3{,}6t + 2 = 3t^2 + 3{,}6t + 1$

$\rightarrow p_2(x) = 3(2x-1)^2 + 3{,}6(2x-1) + 1 = 3(4x^2-4x+1) + 7{,}2x - 2{,}6$

$\boxed{p_2(x) = 12x^2 - 4{,}8x + 0{,}4}$ ✓

g) $f(x) = x^3 - 3x$ en $[0,1]$ por una recta

x: 0 — 1
t: −1 — 1
$\boxed{t = 2x - 1} \rightarrow \boxed{x = \frac{t+1}{2}}$

$f(x) = x^3 - 3x$

$f(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{t+1}{2}\right)$

$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1}\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 - 3\frac{(t+1)}{2}\,dt}{2} = -1{,}25$

$a_1 = \frac{\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 - \frac{3(t+1)}{2}\right] \cdot t\,dt}{2/3} = -1{,}05$

$\boxed{p(t) = -1{,}05t - 1{,}25}$

$p(x) = -1{,}05(2x-1) - 1{,}25$

$\boxed{p(x) = -2{,}1x - 0{,}2}$ ✓

h) $f(x) = e^x$ en $[0,1]$ por una recta y una parábola

$t = 2x-1 \rightarrow x = \frac{t+1}{2} \rightarrow f(t) = e^{\left(\frac{t+1}{2}\right)}$

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1} e^{\frac{t+1}{2}}\, dt}{2} = 1{,}718282$$

$$a_1 = \frac{\int_{-1}^{1} \left(e^{\frac{t+1}{2}}\right) \cdot t\, dt}{2/3} = 0{,}845155$$

$$a_2 = \frac{\int_{-1}^{1} \left(e^{\frac{t+1}{2}}\right)\left(3t^2-1\right)\frac{1}{2}\, dt}{2/5} = 0{,}139864$$

$p_1(t) = 0{,}8452\, t + 1{,}7183$

$\Rightarrow P_1(x) = 0{,}8452(2x-1) + 1{,}7183$

$$\boxed{P_1(x) = 1{,}6904x + 0{,}8731}$$ ✓

• $P_2(t) = 0{,}1399\left(\frac{3t^2-1}{2}\right) + 0{,}8452\, t + 1{,}7183 =$

$= \boxed{0{,}2099t^2 + 0{,}8452\, t + 1{,}64835 = P_2(t)}$

$\Rightarrow P_2(x) = 0{,}2099(2x-1)^2 + 0{,}8452(2x-1) + 1{,}7183 =$

$= 0{,}2099(4x^2 - 4x + 1) + 1{,}6904x + 0{,}8731$

$$\boxed{P_2(x) = 0{,}84x^2 + 0{,}85x + 1{,}08}$$

---

(33) Analice la validez de las sig. afirmaciones, justificando:

- Si f es una función continua en $[a,b]$ y $p_n(x)$ es el polinomio de mínimos cuadrados de grado n, siempre es posible hallar un polinomio de grado n+1 que ajuste mejor a f que $p_n(x)$ en $[a,b]$

  $\boxed{F}$ Si $f(t) = \cos(\pi t)$ en $[-0{,}5\,;\,0{,}5]$ una constante es mejor que una lineal

  cualquier lineal se "despega" del coseno (o seno, también podría ser)

- Es posible hallar una función no lineal tal que exista un polinomio de grado 1 que la aproxime mejor que cualquier polinomio de grado 2.

  $\boxed{V}$ Por ejemplo $f(x) = x^3$ en $[-1,1]$

D) COMBINADOS

(34) Explique las diferencias entre aproximar una función por mínimos cuadrados e interpolar la función.
Indique en qué casos se requiere cada una de ellas

(X)

Con la interpolación se busca hallar una función que pase por los puntos dados en una muestra. Pero no necesariamente es una función que aproxime a la función que daría esos puntos.
Con una aproximación se busca hallar una función que asemeje la verdadera función que arrojaría, aproximadamente, esos puntos.

Con aproximación se obtienen funciones polinómicas de grado 1, 2, 3 o exponenciales o hiperbólicas mientras que con la interpolación puede llegarse a un polinomio de grado $n-1$, siendo n la cantidad de datos obtenidos.

---

(35) Se hicieron 10 mediciones de la altura de un objeto en caída libre en 10 instantes distintos. Para saber la altura en un determinado instante del intervalo, lo más adecuado sería:

~~a)~~ hallar un polinomio interpolante con los 10 puntos
No, pues se puede llegar a obtener un polinomio de grado 9

b) aproximar por una parábola de regresión

c) aproximar por una recta de regresión

d) ninguna de las anteriores

La relación entre la altura (caída libre) y el tiempo, es cuadrática por lo que conviene aproximar por una parábola de regresión.

---

(36) Un químico ha tomado mediciones de Presión y $(\text{volumen})^{-1}$ de un gas a temperatura constante T, y con esos valores desea estimar el número de moles n:
(ley de los gases: $PV = nRT$, con R constante conocida)

Presión	28	35	37	40	45	50	56	59	62	68	74	78	62
vol^{-1}	2,1	2,5	2,7	2,8	3	3,6	3.8	4.2	4.4	5	5,3	5,6	5,9

¿Qué es lo más adecuado que puede hacer?

a) Hallar un polinomio interpolante de todos los datos
b) tomar 2 datos y hallar una recta interpolante
c) Ajustar los datos a una recta de mínimos cuadrados
d) Ajustar los datos a una parábola de mínimos cuadrados

la variación de datos parece ser lineal. tomar solo 2 puntos puede dar una pendiente que no sea adecuada.

Sylvina

37) Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	1,184	1,056	0,973	0,909	0,856	0,812	0,769

a) Indique de qué grado es el polinomio de menor grado que interpola todos los datos.

ES equiespaciado, $h = 0,5$

1,184	-0,128	0,045	-0,026	0,018	-0,012	0
1,056	-0,083	0,019	-0,008	0,006	-0,012	
0,973	-0,064	0,011	0,002	-0,006		
0,909	-0,053	0,009	-0,008			
0,856	-0,044	0,003				
0,812	-0,043					
0,769						

$\rightarrow$ es de grado 5

b) Solo con los $x \in \mathbb{Z}$, obtenga una aproximación exponencial $y = ke^{-mx}$ por mínimos cuadrados.

$y = k\,e^{-mx} \rightarrow \ln(y) = \ln(k) - mx \rightarrow Y = C + MX$, $Y = \ln(y)$

$C = \ln(k) \rightarrow k = e^{C}$

$m = 4$, $\Sigma X = 10$ $\Sigma Y = -0,276622$ $\Sigma XY = -1,402956$, $\Sigma X^2 = 30$

$Y = 0,286545 - 0,14228X \rightarrow \boxed{y = 1,3318\, e^{-0,1423x}}$, $\text{Error}_b = 0,00207$

c) Solo con los $x \in \mathbb{Z}$, obtenga una aproximación de la forma $y = \frac{ax}{b+x}$ por mínimos cuadrados.

$y = \frac{ax}{b+x} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{b+x}{ax} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{b}{a}\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \rightarrow$ $Y = 1/y$ $C = 1/a$

$Y = MX + C$ $X = 1/x$ $M = b/a$

$a = \frac{1}{C}$ $b = \frac{M}{C}$

$\boxed{y = \frac{0,728x}{x - 0,404}}$ $\text{error}_c = 0,9213$

d) Indique cuál de las dos aproxima mejor. Justifique.

Aproxima mejor la exponencial porque tiene menor error

(38) a) Calcule $f_{(1,2)}$ con algún método de interpolación y usando la menor cantidad de puntos.

x	1	1,7	2	3	3,5
y	2,6	3,85	3	3,7	4

tomo $x=1$ y $x=1,7$ $\rightarrow y = mx + b$

$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3,85 - 2,6}{1,7 - 1} = \frac{1,25}{0,7} = 1,7857 \rightarrow y = 1,7857x + b$

$2,6 = 1,7857 \cdot 1 + b \rightarrow b = 0,8143$

$y = 1,7857x + 0,8143 \rightarrow \boxed{y_{(1,2)} = 2,9571}$

b) Siendo $f_1(x) = 0,45x + 2,4189$ y $f_2(x) = 2,74x^{0,30}$ dos funciones de ajuste de los datos anteriores (parte a) ¿Cuál de las dos funciones ajusta mejor los datos?

x_i	y_i	f_1	d^2	f_2	d^2
1	2,6	2,8689	0,072	2,74	0,0196
1,7	3,85	3,1839	0,444	3,2128	0,406
2	3	3,3189	0,102	3,3733	0,1394
3	3,7	3,7689	0,005	3,8097	0,012
3,5	4	3,9939	0	3,98999	0,0001
			0,6225		0,577

tiene menor error f_2 ✓

(39) Dada la sig. tabla de datos:

x	1	2	3	4	5
$y=f(x)$	21	38	62	104	175

a) Indique de qué grados (todos los que haya) es IMPOSIBLE hallar polinomios que interpolen todos los datos dados. Justifique bien detalladamente

es equiespaciado

y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
21	17	7	11	0
38	24	18	11	
62	42	29		
104	71			
175				

El grado interpolante (el de menor grado posible) es grado 3 ∴ ES IMPOSIBLE que exista uno de grado 0, 1, 2 o 4

b) Ajuste los datos a la función: $y = ae^{bx}$ por mínimos cuadrados y estime el error.

$y = ae^{bx} \rightarrow \ln(y) = \ln(a) + bx \rightarrow Y = C + MX$

$Y = \ln(y)$
$X = x$
$a = e^C$
$b = M$

$Y = 2,5495 + 0,5247X$

$\boxed{y = 12,80\, e^{0,5247x}}$ ✓

$\Sigma d_i^2 = 4,8569$ ✓

Syl

(40) Dada la sig. tabla de datos:

x_i	-3	-1	1	3	5	7	9
$f(x_i)$	39	19	-21	-57	-65	-21	99

a) El polinomio de menor grado que interpola todos los puntos es de grado ..3.. . Justifique

Es equiespaciado.

39	-20	-20	24	0
19	-40	4	24	0
-21	-36	28	24	0
-57	-8	52	24	
-65	44	76		
-21	120			
99				

→ grado 3

b) Solo tomando los primeros 5 puntos, obtenga una aproximación lineal por mínimos cuadrados. Grafique.

$m = 5$; $\Sigma x_i = 5$; $\Sigma x_i^2 = 45$; $\Sigma y_i = -85$; $\Sigma x_i y_i = -653$

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & -85 \\ 5 & 45 & -653 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = -2{,}8 \\ a_1 = -14{,}2 \end{array}$$

$$\boxed{y = -14{,}2x - 2{,}8}$$